

# フラクタルで作曲！

難しいことは簡単だ！

いんとろだくしょん

美しい音楽は、心に安らぎをもたらす

音と音のつながり、和音 音楽には難しい要素が多すぎる  
音階・和音・三平方・・・ ピタゴラスは2500年前に考えた

現代の科学・数学の最先端の話題は、フラクタル？ カオス？ 複雑系？

遺伝子・クローン・恐竜・天気予報・経済予測・音楽・美術・・・  
どれも、フラクタル・カオス・複雑系の研究対象

複雑そうで簡単な、簡単そうで複雑な、フラクタル・カオス・複雑系・・・

複雑なことが簡単な考え方で整理できる、フラクタル・カオス・複雑系・・・  
複雑な“音楽”も、簡単な考え方で整理できたら・・・？！

簡単な考え方で作曲できたら・・・？！

その基本は“フラクタル”そして“カオス”

講座『フラクタルで作曲』，いよいよ開演です！

## 第1章 美しい音楽を！

「シューベルトのアベマリア」にて開幕です，ラジカセに耳を傾けてください  
(楽器はパン・フルート，演奏はマイケル・ジェロームでした)

次は，音楽の専門家による“音楽概論”です．しばらくお耳拝借！

生演奏です．J・S・バッハは音階の理論を完成させようと，「平均率クラフイーア曲集」を作曲したそうです．グノーは遊び心で，その第1番を伴奏にして主旋律をつけました．「グノーのアベマリア」です．

演奏は南山国際高校の横地くんと李さんです．しばらくリラックスしましょう…

ドレミファの音階をはじめて研究したのはピタゴラスです．彼は『万物は数である』として，すべてのものを自然数・分数で表そうとしました．彼の発見した分数で表される“ピタゴラス音階”は，現在も利用されることがあるそうです．

## 第2章 音楽家たちの悩み！

音楽家たちは自らを表現するために新しい曲をつくります．そこに至るまでは苦しみ連続です．その苦悩のほどを，映画の中に見ることができます．

映画は『ベニスに死す』です．しばらく，テレビを見てください．

音楽家アッシェンバッハとアルフレッドの対話（抜粋）です…

「美と純粋さの創造は精神的な行為だ」

『いや違う，美は感覚だけに属するものだ』

……

「アルフレッド，芸術は教育の最高要素だ，芸術家は手本であるべきだ

バランスと力の象徴でなくてはいかん，あいまいさは許されない」

『だが芸術はあいまいだ，特に音楽は芸術の中で

最もその性質が強い，それが自然科学をも作った

いいか… これを聞け… このコードも… どうでも解釈できる

このコードの数学的組み合わせによって，

どんなにでも変わる，無限で多種多様だ

その解釈の自由な天国で，君は飛び跳ねている，子供のように… 』

音楽があいまいなものならば… いろいろ実験して確かめてみましょう

コンピュータで作曲すると

(その1. 関係の強い作曲法)

米国の数学者・マーチン・ガードナーがサイコロを用いた作曲法を3通り紹介しています。“偶数の目 1段上がる, 奇数の目 1段下がる”という関係の強い作曲法を用いてできた曲で, 彼は褐色音楽と名付けています。

ちょっと聞いてみてください。

(演奏は横地くん, 李さんです)



関係の強い“あいまいさ”は, 心地良い音楽となったでしょうか?

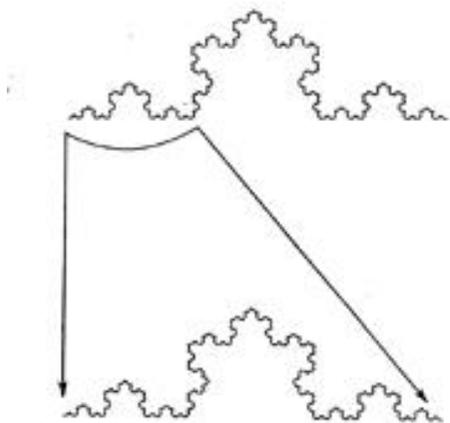
音楽の美しさとは...音楽の専門家のご意見はどうでしょう?

音楽の素人・勝野がコンピュータを使って作曲しました!

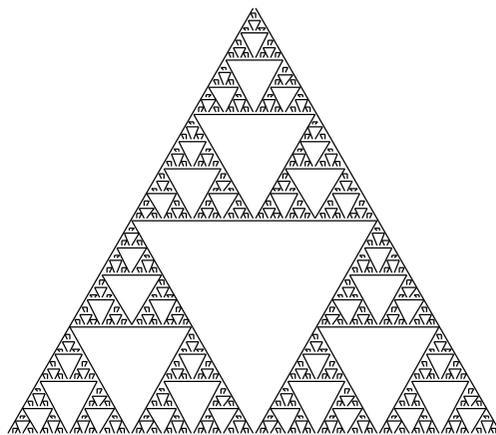
“カオス”とか“フラクタル”という考え方を利用して, 表計算ソフト (EXCEL) で, ほんの5分ほどでできた曲です。褐色音楽と聞き比べてください。

### 第3章 “フラクタル”って何?

“フラクタル”が注目されるようになって10年以上になります。“フラクタル”な図形の美しさが多くの人々の心をとらえました。美しい図形の数々を楽しんでください。ご案内は“フラクタル”にハマったフラクタウリンです。



コッホ曲線



シルピンスキーのギャスケット

“フラクタル”な図形（同じ図形の繰り返し・自己相似がある）が、美しい図形を作り出すように，“フラクタル”な音楽（音階を波形に直して見ると、同じ波形の繰り返し・自己相似がある）が美しい音楽を作り出すかも知れない？

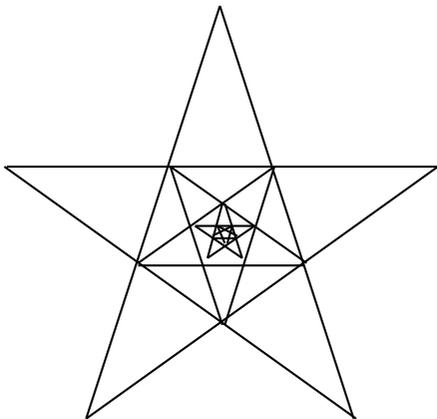
バッハやビートルズの作品は，“フラクタル”な音楽として知られています。

でき上がった“フラクタル”図形だけを見ると，“フラクタル”は難しいもののようにですが、本当はとても簡単な考え方から“フラクタル”が構成され、簡単な“フラクタル”構造から複雑な世界が発生します。そのことをこの目で確かめましょう！

まずは，“テレビの中のテレビ”に注目！

テレビをズームアップすると、なにやらおかしいことになります。

“カオス”です，“カオス”は4章で解説します。



ピタゴラスは星形五角形を愛し、自らのシンボルマークにしました。

それは図のような“フラクタル”な性質と、辺の長さに生まれる“黄金比”を愛していたからです。

ピタゴラスの愛した辺の比 “ $x:1=1:x-1$ ” を変形すれば、漸化式 “ $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ ” や黄金

比の連分数 “ $\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$ ”

ができます。この連分数は“フラクタルな式”で、自然界を支配するフィボナッチ数列も見えてきます。

$$x:1=1:x-1$$

$$x(x-1)=1$$

$$x-1=\frac{1}{x}$$

$$x=1+\frac{1}{x}$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

“黄金比は美の象徴”これは過言ではありません。

また，“漸化式”は“フラクタル”，“カオス”のキーワードです。

どうやら、ピタゴラスは“フラクタルの元祖”だったようです。

# INTERMISSION

休憩です，南山国際高校の福山さん・南山国際中学校の岩本くんの演奏です．フ  
ラクタルにちなんでの曲は「モーツァルトの回文的かつ逆転可能なカノン」で，一  
枚の楽譜を同時に2方向から演奏するものです．

The image displays a musical score for a piece titled "Allegro" by Mozart. The score is written on 12 staves, each beginning with a treble clef and a key signature of one sharp (F#). The tempo marking "Allegro" is positioned at the top left, and the composer's name "Mozart" is at the top right. The music is a canon, characterized by its palindromic and reversible structure. The notation includes various rhythmic values such as eighth and sixteenth notes, as well as rests, and is organized into measures by vertical bar lines. The piece concludes with the word "Allegro" at the bottom right and "Mozart" at the bottom left, indicating that the score is designed to be played simultaneously from both directions.

## 第4章 “カオス”って何？

後半は“カオス”の出番，“カオスの基礎講座”は『ジュラシックパーク』にまかせましょう... 黒に身を包んだ数学者マルコム博士の解説を聞いてください。

数学者マルコムと考古学者サトラーの対話（抜粋）です...

「恐竜は人間の考えたパターンには従わない，そこでカオスが生まれる」

『“カオス”ってどういう事？』

「複雑なシステムに生じる予測不可能性のことだ，

別名“バタフライ効果”，

“北京で蝶がはばたくとNYの天気が変わる”

『？？？』

「説明をはしょりすぎた？ その水で説明しよう，

車の振動があるが仕方がない，手を出して，動かさないで

水を1滴たらず，水滴はどの指の方向へ？」

『親指かしら？』

「動かさないで，もう1度同じことをするよ，水はどっちへ？」

『同じ方向へ...』

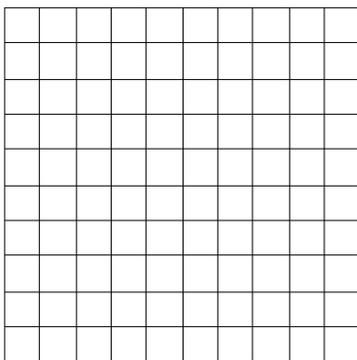
「同じ方向だね？ 目に見えぬ原因で違う方向へ流れる，

... 小さなことが結果的には大きなズレを生む」

『予測不能ね』

「未来は予測不能だ」

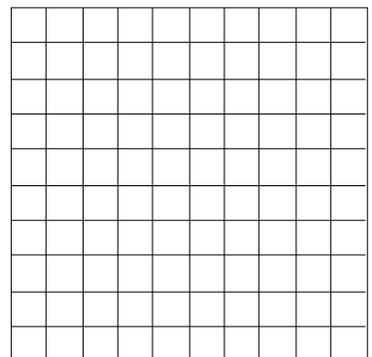
“カオス”って?... 頭の中が“カオス”になりませんでしたか？



“カオス”の前に“デタラメ”を考えてみたい。

「左のマス目に，黒丸を10個デタラメに置け！」

こんな問題を出されたら，みなさんどうしますか？ だれも規則正しく並べたりしません．規則正しくならないように，いかにも“デタラメ”と



いう感じになるように並べるはずですよ．つまり，規則性のある“デタラメ”ができるわけです．

逆に、コンピュータを利用するなどして、機械的に“デタラメ”を作り出して並べたら、とても規則正しく並ぶことがあるかも知れません。

しかし、規則性のある“デタラメ”であれ、規則性のない“デタラメ”であれ、次がどうなるかは予測できません。その意味では、“カオス”と同じです。

### コンピュータで作曲すると

#### (その2. デタラメの作曲法)

何個ものサイコロを振って、その目の合計を音階と対応させます。目の和は規則性のない“デタラメ”に支配されます。

このデタラメの作曲法によりできた音楽を、マーチン・ガードナーは白色音楽と名付けています。褐色音楽とどう違うのでしょうか？ 聞いてください。

(演奏は横地くん、李さんです)



### 音楽の専門家のご意見はどうでしょう？

“カオス”と“フラクタル”の関係は第3章で学びました。“フラクタル”と簡単な式(漸化式)との関係も学びました。

規則性のある“デタラメ”を考えるのが次の話題です。漸化式を規則にすれば“カオス”が生まれ出されることは、よく知られています。

“1/fゆらぎ”って聞いたことありませんか？ “カオス”と“フラクタル”に関係することで、詳しく説明すると『??????』となってしまいます。

扇風機は一定の風を送るため、「心地良い」と感じる人は少ないのですが、自然の風には強弱があり、多くの人が「心地良い」と感じます。

この“強弱の変化”には“1/fゆらぎ”があると言われ、“1/fゆらぎ”機能の付いた扇風機も発売されています。

そして、“強弱の変化”は予測のできない“カオス”であり、(多分)規則性のある“デタラメ”となっているわけです。

“ 1 / f ゆらぎ ” を作り出すには，面倒な計算が必要ですが，ここでは面倒は避けます．簡単な方法でほぼ “ 1 / f ゆらぎ ” のある曲を作曲できるそうです．

コンピュータで作曲すると

(その3. ゆらぎの作曲法)

規則性のあるデタラメ作曲法とは，3個のサイコロをある規則に沿って振って，目の和を音階と対応させます．

目の和は規則性のある “ デタラメ ” に支配され，その “ 高低の変化 ” には “ 1 / f ゆらぎ ” が見られます．

ガードナーが 1 / f 音楽と名付けた曲です，聞いてください．

(演奏は横地くん，李さんです)



褐色音楽，白色音楽と比べて，皆様のご意見はどうでしょう？

## 第5章 コンピュータ作曲法入門！

ピタゴラスの愛した辺の比 “  $x:1 = 1:x-1$  ” を利用して，“カオス”を生み出す漸化式（黄金比から作る漸化式）を作り，そこから音階を作り出します．

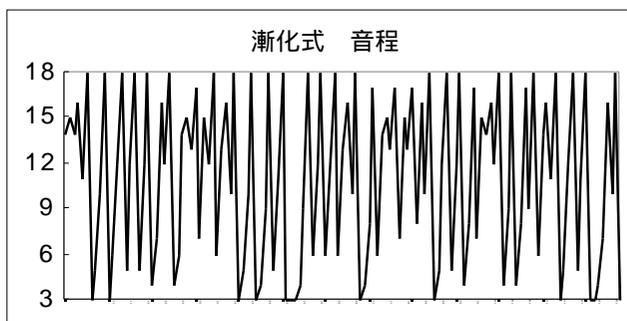
第2章で紹介した曲がそれです．作曲法を簡単に紹介します．

$$x:1 = 1:x-1 \quad 1 = x(x-1)$$

$$y = 4x(1-x) \quad x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$$

$x_1$  に 0 ~ 1 の適当な数を代入し，順に  $x_2, x_3, x_4 \dots$  と求めていきます．次に， $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$  をその数の大きさにより音の高さに変換し，音階とします．

音階の変化は，右のグラフのようになります．音の高低は激しく動きますが，“ゆらぎ”らしいものが見られます．



同様の方法で，音の長さを決めれば “ 作曲 ” は完了です．

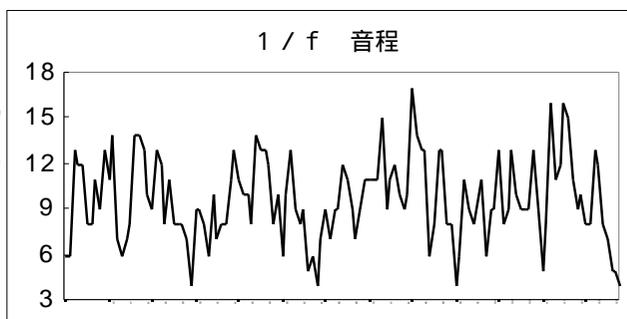
“ 1 / f 音楽 ” の作曲はもう少し面倒で， 3 個のサイコロの振り方は次のようです .

白	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
赤	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×	○	×
黄	○	×	×	×	○	×	×	×	○	×	×	×	○	×	×	×

○ : サイコロを振る , × : サイコロは前回のまま , 合計の値で音階にする .

これで , サイコロによる “ 1 / f ゆらぎ ” 的作曲は完了です ! サイコロの目を乱数にすれば , コンピュータ・表計算ソフトで簡単に処理できます .

右のグラフは “ 1 / f 音楽 by 勝野 ” 第 1 号です . 波の中に “ フラクタル ” や “ ゆらぎ ” は見えてきませんか ?



実際に聞いてください . 心地良さはあるでしょうか ?

一つだけ難点があります . 一度数式を入力すれば , 計算指示だけで次々と新しい曲が生まれます . 有難みが消えていきます…

## 第 6 章 サイコロで作曲しよう !

サイコロ振りの作曲法 = “ 1 / f ゆらぎ ” 的作曲法 , 理屈は分かりましたか ?

音階も , 音符も 3 個のサイコロの目の和に支配されます . 3 ~ 18 の数を音階・音符に変換する規則は次のようにしました .

音 階																	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
<u>ソ</u>	<u>ラ</u>	<u>シ</u>	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ		

音 符																	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
					●					●		○		○			

## みんなでサイコロを振ろう

音階組・音符組に分かれてそれぞれサイコロを振り，8小節程の小品を作曲します．規則はこれまでに説明した通りです．サイコロで決められた音符を次々コンピュータに登録します．

ただし，曲の終わりは締めくくりが大切，最後の1小節は専門家にまかせます．

また，音楽には拍子がつきもの． $\frac{4}{4}$ 拍子になるように，必要に応じて休止符を挿入したり3連符を用いたりしますが，これもすべて専門家にまかせます．

### 音階

白															
赤		×		×		×		×		×		×		×	
黄		×	×	×		×	×	×		×	×	×		×	×
計															
音階															

白															
赤		×		×		×		×		×		×		×	
黄		×	×	×		×	×	×		×	×	×		×	×
計															
音階															

### 音 階

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ソ	ラ	シ	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ

# 音符

白																
赤		×		×		×		×		×		×		×		×
黄		×	×	×		×	×	×		×	×	×		×	×	×
計																
音符																

白																
赤		×		×		×		×		×		×		×		×
黄		×	×	×		×	×	×		×	×	×		×	×	×
計																
音符																

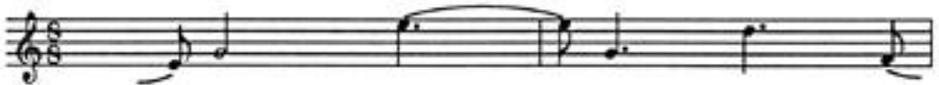
音 符																	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18		
					●					●		○		○			

# 楽譜

Blank musical staff lines for notation.

みんなで作曲した音楽

サマーセミナー'97 at 東海女子高校

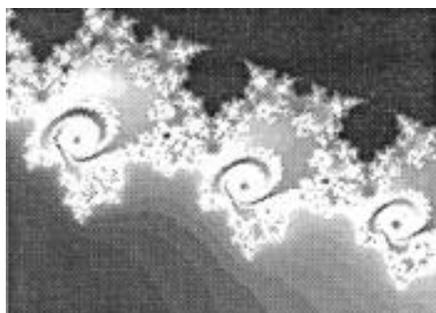


サマーセミナーではみんなでサイコロ振って作曲しました。

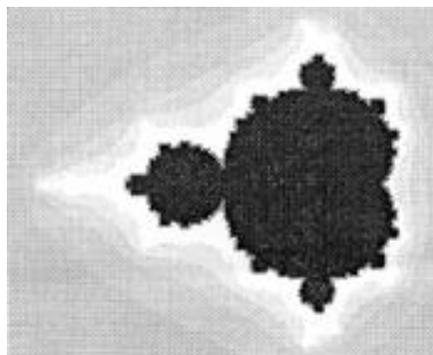
# フラクタルで作曲！ 解説編

## フラクタルな図形

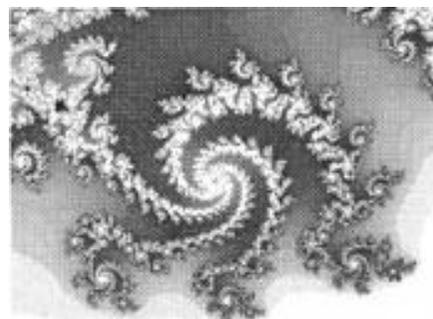
マンデルブロ集合やジュリア集合は  
とってもフラクタルですが、難しいこ  
とは抜きにして、紹介するだけにとど  
めるのがいいでしょう...



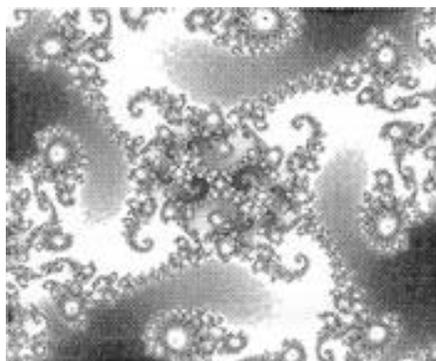
一  
部  
を  
拡  
大



一  
部  
を  
拡  
大

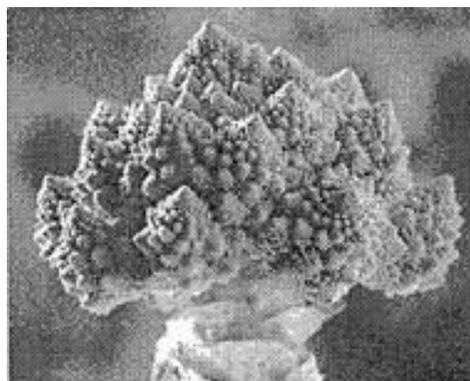


一  
部  
を  
拡  
大



## フラクタルな

カリフラワーもあります



<写真> <http://member.nifty.ne.jp/hkawagoe/> より

## 参考資料・シネマ

音楽は好きでも作曲となると自分とは無縁なことと考えていましたが、『フラクタル音楽』（マーチン・ガードナー，丸善出版）を一読して考えが一変，これを骨格にサマーセミナーでクロスオーバー授業に取り組むことになりました。

問題はフラクタルやカオスが「こんなものか」と何となく納得できるようにすることと考えていたら，あれこれとアイデアが寄せられたり湧き出たり... 結局，シネマセマジックの延長上の授業となりました。

『ベニスに死す』は"mathematical combination"のせりふを聞いた時，いつか使ってやろうと思っていた映画．見事にその役割を果たしました。

『ジュラシックパーク』は原作本の各章の扉が凝っていて，原作者（マイケル・クライトン）の先見性に感心しましたが，クローンが現実化した今，これらの問題への警鐘であったことをはっきり感じさせる話だと思います。

## テレビの中のテレビ

テレビカメラ（ビデオカメラ）でモニターテレビを写し，テレビの中のテレビの世界を作ります．これは一番簡単なフラクタルな世界です．次に，これを徐々にズームアップします... 突然，カオスに変身します。

もう一度テレビの中のテレビの世界を作ります．この時少しカメラを傾けます．これを徐々にズームアップすると... 突然，台風の目のような蛸唐草模様のカオスが現れます。

フラクタルとカオスは表裏一体であることが実感できるはずです。

## フラクタルと漸化式，そして星形五角形

フラクタルな図形として最も有名なマンデルブロー集合と“ $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ”なる漸化式は切り離して考えられません．しかし，これでフラクタルを解説したら逆効果になるかもしれません。

もっと身近で誰もが描いたことがあるようなフラクタルな図形を... と考えていて“星形五角形”に気付きました．正五角形の対角線と辺の比の関係式を変形することで，漸化式“ $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ ”と“フラクタルな式”（黄金比の連分数）ができることも感動です。

### コンピュータを使って作曲 その1.

みんなでサイコロを振って作曲するものを、前もって表計算ソフト（EXCEL）でシミュレーションしてみました。入力する数式は以下の通りですが、A2～D5に式を入力したあと、その内容をA6以降に複写したものです。

これにより、D列に3～18の整数を得られるので、P50の表に沿って音階に変換します。次に、再計算指示をすればD列にもう一度3～18の整数が得られるので、P51の表に沿って音符に変換します。

	A	B	C	D
1	白	赤	黄	合計
2	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A2:C2)
3	=A2	=B2	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A3:C3)
4	=A3	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A4:C4)
5	=A4	=B4	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A5:C5)
6	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A6:C6)
7	=A6	=B6	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A7:C7)
8	=A7	=INT(RAND()*6)+1	=C7	=SUM(A8:C8)
9	=A8	=B8	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A9:C9)
10	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A10:C10)
11	=A10	=B10	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A11:C11)
12	=A11	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A12:C12)
13	=A12	=B12	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A13:C13)
14	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=INT(RAND()*6)+1	=SUM(A14:C14)

### コンピュータを使って作曲 その2.

$$x:1 = 1:x-1 \quad 1 = x(x-1)$$

$$y = 4x(1-x)$$

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$$

漸化式に至るまでには、

0  $x$  1のとき、

$$-\frac{1}{4} x(x-1) \geq 0,$$

よって、0  $4x(1-x)$  1

という計算があって、定数4を用い

	A	B	C
1	=RAND()		漸化式
2	=4*A1*(1-A1)		=INT(A2*16)+3
3	=4*A2*(1-A2)		=INT(A3*16)+3
4	=4*A3*(1-A3)		=INT(A4*16)+3
5	=4*A4*(1-A4)		=INT(A5*16)+3
6	=4*A5*(1-A5)		=INT(A6*16)+3
7	=4*A6*(1-A6)		=INT(A7*16)+3

ています。表のような計算式を入力すればC列に3～18の整数を得られます。

A1に乱数で初期値が入れば、C列に新しい整数の列ができます。「初期値を変えれば...」まさに“カオスの理論”です。

これも その1. 同様に、再計算指示をするだけで何度でも3～18の整数を得られます。あとは、P50とP51の表に沿って音階・音符に変換すればOK。再計算指示だけで、何曲でも作曲できることになります。

また、漸化式を変えたり音階・音符の変換方法を変えればいくらかでも新しいものが生み出せるかも知れません。

### 音楽処理のソフトウェア

コンピュータで音楽を処理するために“Ballade”なるソフトウェアを利用しました。この場合、音階の入力はキーボード（鍵盤）、音符の入力はキーボード（テンキー）となります...

### コンピュータを使ってフラクタルな曲探し

言うまでもなく“インターネット”の利用です、海外にはフラクタルに関するHPが数多く開かれています。音楽に関してはジャズ風の曲が主流です、作曲用のソフトをダウンロードすることも可能ですから、一度当たってみてはいかがでしょうか？